Fachbereich II – Mathematik - Physik - Chemie

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

02/2017

Diana Estévez Schwarz

Herleitung einer Einkommensteuerfunktion durch Modellierung mit Differentialgleichungen

Developing a function for income tax by modeling with differential equations (in German)

Reports in Mathematics, Physics and Chemistry

Berichte aus der Mathematik, Physik und Chemie

ISSN (print): 2190-3913

Reports in Mathematics, Physics and Chemistry

Berichte aus der Mathematik, Physik und Chemie

The reports are freely available via the Internet:
http://www1.beuth-hochschule.de/FB_II/reports/welcome.htm

02/2017, September 2017

Herleitung einer Einkommensteuerfunktion durch Modellierung mit Differentialgleichungen
Developing a function for income tax by modeling with differential equations (in German)

Editorial notice / Impressum

Published by / Herausgeber:
Fachbereich II
Beuth Hochschule für Technik Berlin
Luxemburger Str. 10
D-13353 Berlin
Internet: http://public.beuth-hochschule.de/FB_II/
E-Mail: fbiireports@beuth-hochschule.de

ISSN (print): 2190-3913

Herleitung einer Einkommensteuerfunktion durch Modellierung mit Differentialgleichungen

Diana Estévez Schwarz

Zusammenfassung

Einkommensteuerfunktionen werden in der Regel als stückweise definierte Polynome festgelegt, was offensichtliche Nachteile mit sich bringt, insbesondere

- umständliche Berechnungsvorschriften, und
- keine mehrfache stetige Differenzierbarkeit (Glattheit).

In diesem Beitrag wird eine Einkommensteuerfunktion hergeleitet, die hingegen

- eine sehr elegante Berechnungsvorschrift hat, und
- unendlich oft stetig differenzierbar ist.

Zu diesem Zweck wird der Effektivsteuersatz als Lösung einer einfachen linearen Differentialgleichung berechnet. Ein Vergleich mit der deutschen Einkommensteuerfunktion des Jahres 2017 verdeutlicht die Vorteile.

1 Einleitung

Stückweise definierte Einkommensteuerfunktionen können zu unbefriedigenden Situationen führen, insbesondere wenn der Grenzsteuersatz nicht stetig ist [1], s. Beispiel 1. Um dem entgegenzuwirken, könnte die Einkommensteuerfunktion stückweise auf sehr vielen kleinen Intervallen festlegt werden, die möglichst gut zueinander passen sollten. In diesem Beitrag wird daher dargestellt, wie in diesem Zusammenhang Methoden der Infinitesimalrechung eingesetzt werden können.

[1] vgl. auch [1] und z.B. die aktuelle Studie [2].

2 Notation

In den Herleitungen verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

- $x > 0$: zu versteuerndes Einkommen.
- E_{max}: Spitzensteuersatz in Prozent.
- $E(x)$: Effektivsteuersatz in Prozent.
- $\rho(x)$, definiert als das Verhältnis

$$\rho(x) := \frac{E'(x)}{E(x)}.$$

- $S(x)$: Einkommensteuerfunktion

$$S(x) := E(x) \cdot x.$$

- $\varepsilon(x)$: Elastizität (oder relative Kondition) von S

$$\varepsilon(x) := \frac{S'(x) \cdot x}{S(x)} = \frac{S'(x)}{E(x)} = \frac{E'(x) \cdot x + E(x)}{E(x)} = \rho(x) \cdot x + 1.$$

- $G(x)$: Grenzsteuersatz (oder absolute Kondition von S) in Prozent

$$G(x) := S'(x) = E'(x) \cdot x + E(x) = E(x)\,(\rho(x) \cdot x + 1) = E(x) \cdot \varepsilon(x).$$

  Der Grenzsteuersatz beschreibt, welcher Anteil eines zusätzlich zu versteuernden Euro (oder anderer Währungseinheit) als Steuer abgeführt werden muss. Daher verdeutlicht er, inwieweit es sich lohnt, das zu versteuernde Einkommen zu steigern oder zu verringern.

Die Bezeichnungen E_{2017}, S_{2017}, G_{2017}, ε_{2017} verwenden wir für die Funktionen, die dem Einkommensteuertarif 2017 entsprechen, vgl. Abschnitt 7.

3 Modellierung

Der Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Betrachtung der Definition von $\rho(x)$ als lineare homogene Differentialgleichung

$$E'(x) = \rho(x) \cdot E(x). \tag{1}$$

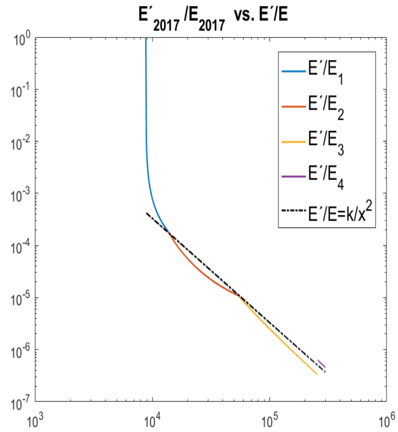

Abbildung 1: Logarithmische Darstellung der Modellierungsannahme zur Differentialgleichung (2).

Wäre also $\rho(x)$ vorgegeben, so könnte eine parameterabhängige Funktion für $E(x)$ als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung bestimmt werden.

Die in den Abschnitten 4 bis 7 ausgearbeitete Idee besteht darin, für die Funktion $\rho(x)$ anzunehmen, dass Sie invers proportional zum Quadrat des Einkommens ist, d.h.

$$\rho(x) = \frac{k}{x^2}$$

für eine Konstante $k > 0$. In den Abschnitten 8 bis 10 werden weitere mögliche Funktionen $\rho(x)$ betrachtet.

Um aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1) eine spezielle Lösung zu bestimmen, verwenden wir schließlich die Annahme

$$\lim_{x\to\infty} E(x) = E_{max} < \infty.$$

Ist $E(x)$ bestimmt, so können $S(x)$ und $G(x)$ definitionsgemäß berechnet werden.

Für eine erste Schätzung von $\rho(x)$ wurde für die Daten von 2017 der Quotient $\frac{E'_{2017}(x)}{E_{2017}(x)}$ in einem doppelt logarithmischen Diagramm betrachtet, in dem laut Definition Potenzfunktionen als Geraden dargestellt werden. In Abbildung 1 sind die beiden Kurvenverläufe logarithmisch dargestellt, wobei $k = \ln(2) \cdot 48000$ gesetzt wurde.

4 Berechnung der Funktionen

4.1 Effektivsteuersatz $E(x)$

Wir berechnen für $x > 0$ den Effektivsteuersatz als Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$E'(x) = \frac{k}{x^2} \cdot E(x), \quad k > 0. \tag{2}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kann mit Trennung der Variablen berechnet werden und lautet:

$$E(x) = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aus der Überlegung

$$E_{max} = \lim_{x \to \infty} C \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}}$$

folgt schließlich $C = E_{max}$, womit wir die gesuchte Funktion für den Effektivsteuersatz darstellen können als

$$E(x) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}}, \quad \text{für} \quad k > 0, \quad x > 0.$$

4.2 Resultierende $S(x)$, $\varepsilon(x)$, $G(x)$

- Die Steuerfunktion für $x > 0$ ergibt sich laut Definition als

$$S(x) := E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}} \cdot x, \quad \text{mit} \quad k > 0.$$

- Für die Elastizität von S gilt ferner

$$\varepsilon(x) = \rho(x) \cdot x + 1 = 1 + \frac{k}{x}.$$

- Für den Grenzsteuersatz erhalten wir somit

$$G(x) = S'(x) = E(x) \cdot \left(1 + \frac{k}{x}\right) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}} \cdot \left(1 + \frac{k}{x}\right).$$

5 Eigenschaften der neuen Einkommensteuerfunktion

Die Funktion $e^{-\frac{k}{x}}$ ist für alle $x > 0$ definiert und unendlich oft stetig differenzierbar. Daher sind auch die eingeführten Funktionen $E(x)$, $S(x)$ und $G(x)$ für alle $x > 0$ definiert und unendlich oft stetig differenzierbar. Diese Eigenschaft haben die stückweise definierten Steuerfunktionen aus dem Jahr 2017 nicht. Zudem können wir aus den Ableitungen einige Eigenschaften folgern:

$$\begin{aligned}
E(x) &= E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}}, & S(x) &= E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x}} \cdot x,\\
E'(x) &= E_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{x}} \cdot \frac{k}{x^2}, & S'(x) &= E_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{x}} \cdot \left(1 + \frac{k}{x}\right),\\
E''(x) &= E_{max} \cdot \frac{k\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{x}}\,(k-2x)}{x^4}, & S''(x) &= E_{max} \cdot \frac{k^2\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{x}}}{x^3},\\
E'''(x) &= E_{max} \cdot \frac{k\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{x}}\left(k^2-6kx+6x^2\right)}{x^6}, & S'''(x) &= E_{max} \cdot \frac{k^2\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{x}}\,(k-3x)}{x^5}.
\end{aligned}$$

Für die Funktionen ergibt sich für $k > 0$, $x > 0$

1. E ist positiv, streng monoton wachsend und hat einen Wendepunkt bei $k/2$. E ist konvex für $x < k/2$ und konkav für $x > k/2$. Da

   $$\lim_{x\to 0} E(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} E(x) = E_{max},$$

   folgt zudem $0 \leq E(x) \leq E_{max}$.

2. S ist positiv, streng monoton wachsend und konvex. Zudem ergibt sich

   $$\lim_{x\to 0} S(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} S(x) = \infty.$$

3. $G = S'$ ist positiv, streng monoton wachsend und hat einen Wendepunkt bei $k/3$. G ist konvex für $x < k/3$ und konkav für $x > k/3$. Da ferner

   $$\lim_{x\to 0} G(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} G(x) = E_{max},$$

   gilt erwartungsgemäß $0 \leq G(x) \leq E_{max}$.

4. Die Elastizität $\varepsilon(x) = 1 + \frac{k}{x}$ ist streng monoton fallend und konvex,

   $$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

6 Veranschaulichung des Parameters k

Wie bei vielen Funktionen, die Exponentialfunktionen einbeziehen, ist auch in diesem Fall der Faktor k leicht zu veranschaulichen[2].

Betrachten wir für $0 < p < 1$ den skalierten Spitzensteuersatz $p \cdot E_{max}$, so entspricht dies z.B. für $p = 0.5$ dem halben Spitzensteuersatz $0.5 \cdot E_{max}$. Möchten wir den Betrag x_p berechnen, bei dem der Effektivsteuersatz $p \cdot E_{max}$ angewendet wird, so betrachten wir für

$$p \cdot E_{max} = E(x_p) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x_p}},$$

und somit

$$p = \mathrm{e}^{\frac{-k}{x_p}}$$

bzw.

$$k = -\ln(p) \cdot x_p = \ln\left(\frac{1}{p}\right) \cdot x_p,$$

wobei k positiv ist, da aus $0 < p < 1$ stets $\ln(p) < 0$ folgt.

Setzen wir diese Darstellung in die Formel von E ein, so ergibt sich

$$E(x) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln(p) \cdot x_p}{x}},$$

was laut Potenzrechenregeln äquivalent ist zu

$$E(x) = E_{max} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{-\frac{x_p}{x}} = E_{max} \cdot p^{\frac{x_p}{x}}.$$

Entsprechend kann die Steuerfunktion dargestellt werden als

$$S(x) = E_{max} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{-\frac{x_p}{x}} \cdot x = E_{max} \cdot p^{\frac{x_p}{x}} \cdot x.$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese Darstellung leicht erkennen lässt, dass sich E aus E_{max} in Prozent ergibt und S die gleiche Einheit wie x hat.

Ist also z.B. $x_{0.5}$ der Betrag mit $E(x_{0.5}) = 0.5 \cdot E_{max}$, so ergibt sich

$$E(x) = E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}}{x}} \quad \text{und} \quad S(x) = E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}}{x}} \cdot x.$$

Dabei werden wir $x_{0.5}$ als **Halbspitzensteuersatzeinkommen** bezeichnen.

Da für die Eulersche Zahl e nach Definition $\ln(\mathrm{e}) = 1$ gilt, folgt

$$k = x_{\mathrm{e}^{-1}}.$$

[2] Das Ergebnis ist analog zur Halbwertszeit, die bei Zerfallsprozessen betrachtet wird.

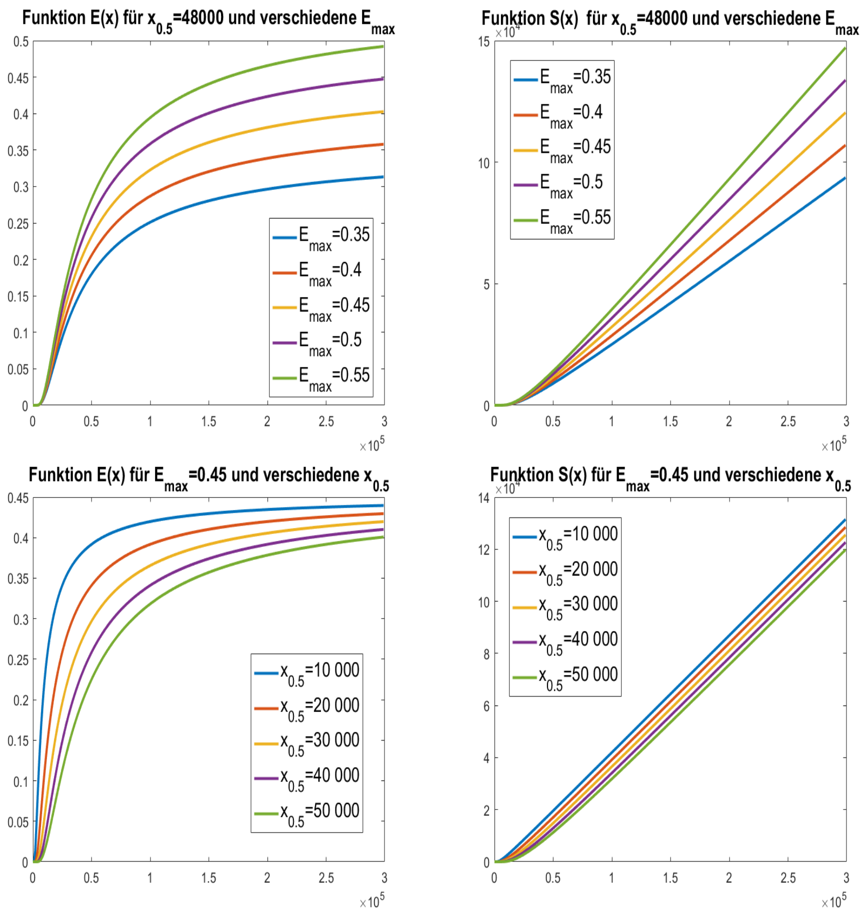

Abbildung 2: Auswirkung der Parameter bei den eingeführten Funktionen E(x) und S(x).

7 Vergleich mit der Einkommensteuerfunktion 2017

Die tarifliche Einkommensteuer im Veranlagungszeitraum 2017 bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen [3]:

1. bis 8 820 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 8 821 Euro bis 13 769 Euro: (1 007,27 · y + 1 400) · y;
3. von 13 770 Euro bis 54 057 Euro: (223,76 · z + 2 397) · z + 939,57;
4. von 54 058 Euro bis 256 303 Euro: 0,42 · x - 8 475,44;
5. von 256 304 Euro an: 0,45 · x - 16 164,53.

- Die Größe y ist ein Zehntausendstel des den Grundfreibetrag übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
- Die Größe z ist ein Zehntausendstel des 13 769 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
- Die Größe x ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

In der Notation der vorherigen Abschnitte ist die Funktion S_{2017} also auf fünf Intervallen definiert

$$S_{2017}(x) = \begin{cases} S_0(x), \text{ falls} & 1 \leq x \leq 8820, \\ S_1(x), \text{ falls} & 8821 \leq x \leq 13769, \\ S_2(x), \text{ falls} & 13770 \leq x \leq 54057, \\ S_3(x), \text{ falls} & 54058 \leq x \leq 256303, \\ S_4(x), \text{ falls} & x \geq 256304. \end{cases}$$

dabei ist $S_0 \equiv 0$, die Funktionen S_1, S_2 sind quadratische Funktionen und S_3, S_4 Geraden. Entsprechend definieren wir $G_{2017}(x)$ und $E_{2017}(x)$.

Für den Vergleich mit den Funktionen $E(x)$, $S(x)$ und $G(x)$ verwenden wir die Parameter

$$E_{max} = 0.45 \quad \text{und} \quad x_{0.5} = 48000.$$

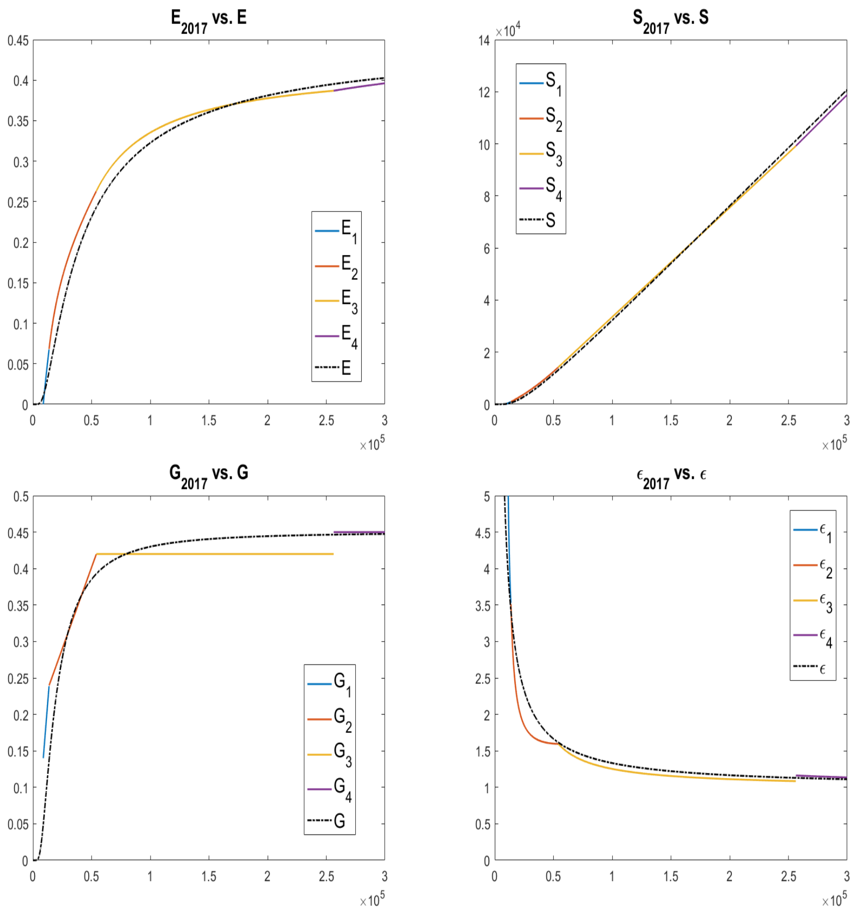

Abbildung 3: Darstellung der berechneten Funktion und der entsprechenden für das Jahr 2017.

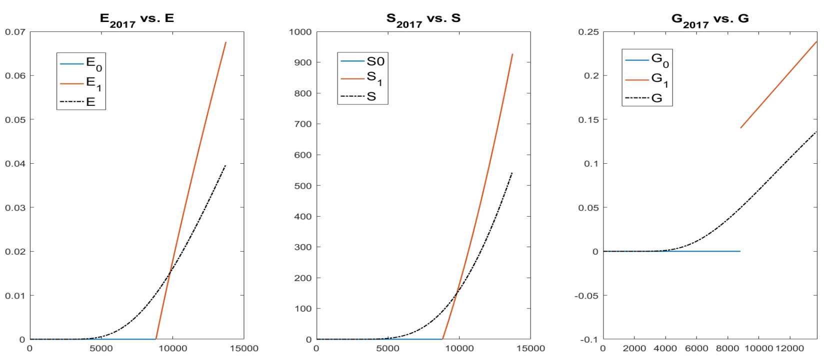

Abbildung 4: Detailansicht der Funktionen um das steuerfreie gesetzliche Grundeinkommen.

Der Sprung von G_{2017} bei dem Grundfreibetrag kann mit einem Beispiel veranschaulicht werden, bei dem allerdings keine weiteren Sozialabgaben berücksichtigt werden.

Beispiel 1. *Angenommen eine Person hat in einem Jahr bereits* 882 *Stunden mit einem Stundenlohn von* 10 *Euro gearbeitet und hat keine weiteren Einkommen, so dass sie keine Steuern bezahlen muss. Arbeitet Sie aber eine weitere Stunde, so wäre ihr Einkommen* 8830*, woraufhin sie für 10 Euro Steuern zahlen müsste.*

$$S_1(8830) = ((1007.27) \cdot \frac{10}{10000} + 1400) \cdot \frac{10}{10000} = 1.40 \quad \textit{Euro}.$$

De facto würde die Person für die zusätzliche Stunde nur $10 - 1.40 = 8.60$ *Euro netto zusätzlich erhalten. Für die hergeleitete Steuerfunktion ergibt sich hingegen*

$$S(8820) = 91.29, \quad S(8830) = 91.78 \quad \textit{Euro}.$$

Arbeitet die Person also diese eine zusätzliche Stunde, so erhält sie

$$10 - (91.78 - 91.29) = 9.51 \quad \textit{Euro}$$

mehr netto.

Verwendet man diese Funktion S, so wäre de facto der erste Betrag, für den ein Cent Steuern gezahlt werden muss, die Nullstelle von

$$g(x) = 0.01 - 0.45 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)48000}{x}} \cdot x,$$

also $x_0 = 2830$. Dieser Wert könnte also als Grundfreibetrag aufgefasst werden. Er fällt natürlich niedriger als 8820 aus, da der Übergang ja geglättet wird. Soll 8820 als steuerfreier Betrag erhalten bleiben, so müsste bei der Modellierung ein Korrekturterm hinzugenommen werden.

8 Modellierung mit Grundfreibetrag

Möchten wir einen Korrekturterm x_0 einbeziehen, für den $E(x) = 0$ für $x \leq x_0$ gelten soll, so bietet es sich an, für $x > x_0$

$$\rho(x) = \frac{k}{(x - x_0)^2}, \tag{3}$$

[3] Einkommensteuergesetz (EStG) § 32a Einkommensteuertarif

zu betrachten. Folglich berechnen wir den Effektivsteuersatz für $x > x_0$ als Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$E'(x) = \frac{k}{(x - x_0)^2} \cdot E(x), \quad k > 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Diffenrentialgleichung kann erneut mit Trennung der Variablen ermittelt werden und lautet:

$$E(x) = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x-x_0}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aus

$$E_{max} = \lim_{x\to\infty} C \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x-x_0}}$$

folgt wiederum $C = E_{max}$, womit wir die gesuchte Funktion für den Effektivsteuersatz darstellen können als

$$E(x) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x-x_0}}, \quad \text{für} \quad k > 0, \quad x > x_0,$$

was schließlich zu

$$S(x) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x-x_0}} \cdot x, \quad \text{für} \quad k > 0, \quad x > x_0,$$

führt. Aus dieser Darstellung von $S(x)$ ergibt sich für $x > x_0$ weiter

$$G(x) = S'(x) = E(x) \cdot \left(1 + \frac{kx}{(x - x_0)^2}\right),$$

und

$$\varepsilon(x) = 1 + \frac{kx}{(x - x_0)^2}.$$

Betrachtet man nun k, so ergibt sich aus der Überlegung

$$p \cdot E_{max} = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-k}{x_p - x_0}}, \quad \text{für} \quad k > 0, \quad x > x_0,$$

bei Einbeziehung von x_0 die Darstellung

$$k = -\ln(p) \cdot (x_p - x_0) = \ln\left(\frac{1}{p}\right) \cdot (x_p - x_0),$$

und somit z.B.

$$E(x) = E_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\ln(2)\frac{x_{0.5}-x_0}{x-x_0}} = E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}-x_0}{x-x_0}}, \quad \text{für} \quad x > x_0.$$

Dabei ist zu beachten, dass $x_0 < x_p$ für $0 < p < 1$ gelten muss.

Zusammenfassend ergeben sich für $x > 0$ die eleganten Funktionsvorschriften

$$E(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 < x \leq x_0, \\ E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}-x_0}{x-x_0}}, & \text{falls} \quad x > x_0, \end{cases} \tag{4}$$

$$S(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 < x \leq x_0, \\ E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}-x_0}{x-x_0}} \cdot x, & \text{falls} \quad x > x_0, \end{cases} \tag{5}$$

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 < x \leq x_0, \\ E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}-x_0}{x-x_0}} \cdot \left(1 + \frac{kx}{(x-x_0)^2}\right), & \text{falls} \quad x > x_0, \end{cases} \tag{6}$$

für $k = \ln(2) \cdot (x_{0.5} - x_0)$.

Der Grundfreibetrag x_0 könnte für ein steuerfreies gesetzliches Grundeinkommen X_0 als Nullstelle von

$$g(x_0) = 0.01 - E_{max} \cdot 2^{-\frac{x_{0.5}-x_0}{X_0+1-x_0}} \cdot (X_0 + 1)$$

berechnet werden. Für $X_0 = 8820$, $x_{0.5} = 48000$ und $E_{max} = 0.45$ wäre der entsprechende Wert demzufolge $x_0 = 6595$. Die Darstellung der entsprechenden Funktionen ist in Abbildungen 5 und 6 zu finden.

9 Splitting-Verfahren

Werden zwei Partner mit Einkommen x_A und x_B zusammen veranlagt, so beträgt die Einkommensteuer das Zweifache des Steuerbetrags, der sich für die Hälfte ihres gemeinsam zu versteuernden Einkommens ergibt [4].

Für die im letzten Abschnitt eingeführte Funktion erhalten wir somit

$$2 \cdot S\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) = 2 \cdot E_{max} \cdot \left(2^{-\frac{x_{0.5}-x_0}{\frac{x_A+x_B}{2}-x_0}}\right) \cdot \frac{x_A + x_B}{2} = E_{max} \cdot 2^{-\frac{2x_{0.5}-2x_0}{(x_A+x_B)-2x_0}} \cdot (x_A + x_B).$$

Der Betrag entspricht also dem, der bei Verdoppelung des Grundfreibetrages x_0 und des Halbspitzensteuersatzeinkommens $x_{0.5}$ für das Einkommen $x_A + x_B$ resultieren würde.

[4] Einkommensteuergesetz (EStG) § 32a Einkommensteuertarif

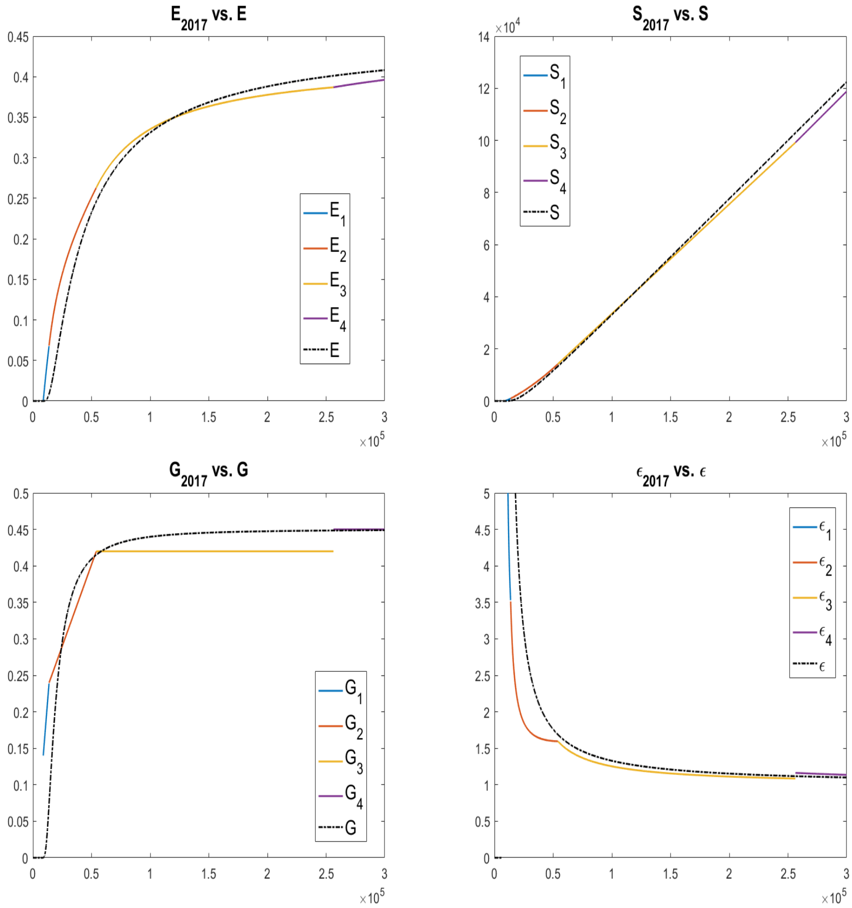

Abbildung 5: Ergebnisse bei Einbeziehung des Grundfreibetrages.

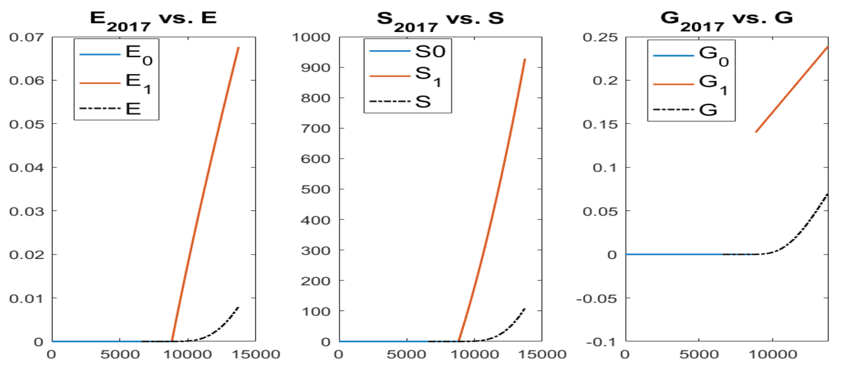

Abbildung 6: Detailansicht um das steuerfreie gesetzliche Grundeinkommen bei Einbeziehung des Grundfreibetrages.

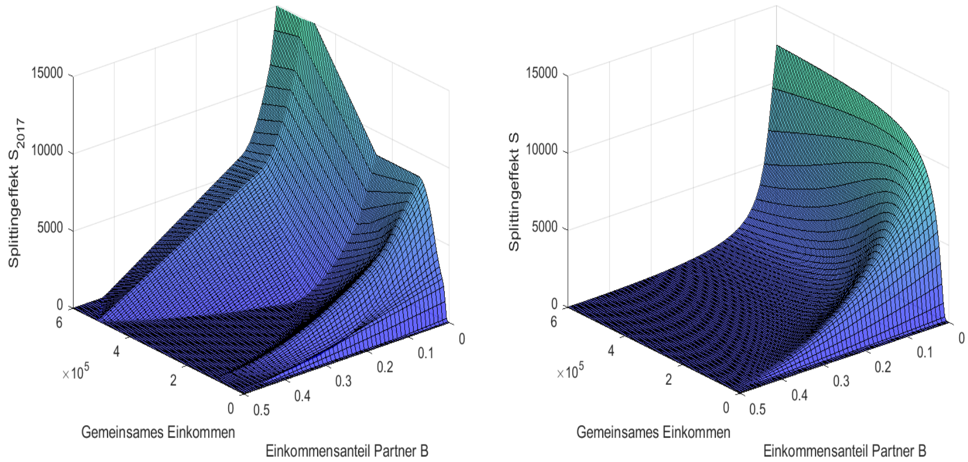

Abbildung 7: Splittingeffekt (7) für S_{2017} (links) und S mit $E_{max} = 0.45$, $x_0 = 6595$, $x_{0.5} = 48000$ (rechts).

Die Glattheitseigenschaften von S übertragen sich auf den Splittingeffekt

$$\text{Splittingeffekt}(x_A, x_B) := S(x_A) + S(x_B) - 2 \cdot S\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right). \tag{7}$$

In Abbildung 7 wird verdeutlicht, wie sich unterschiedliche Einkommen x_A und x_B für S_{2017} und S auswirken (vgl. [1]). Zudem ergibt sich aus Grenzwertbetrachtungen

$$\text{Splittingeffekt}(x_A, x_B) \leq E_{max} \cdot k.$$

Für $x_0 = 6595$, $x_{0.5} = 48000$ und $E_{max} = 0.45$ wäre der Splittingeffekt also stets kleiner als 12915.

10 Verallgemeinerung

In einem allgemeineren Rahmen kann man Funktionen $P = P_\alpha$ (P für Progressionsatz) berechnen als Lösungen der Differentialgleichung

$$P'_\alpha(x) = \frac{k}{x^\alpha} \cdot P_\alpha(x), \quad k \geq 0, \quad x > 0 \tag{8}$$

unter der Bedingung

$$\lim_{x \to \infty} P_\alpha(x) = P_{max} < \infty. \tag{9}$$

Wir unterscheiden hierfür einige Fälle:

- Für $k = 0$ entspricht (8) der trivialen Differentialgleichung $P' = 0$, die bei Einbeziehung von (9) die konstante Lösung $P = P_{max}$ liefert.

- Für $k \neq 0$ und $\alpha = 1$ entspricht (8) der Differentialgleichung
$$P_1'(x) = \frac{k}{x} \cdot P_1(x),$$
die zur Lösung $P_1 = C \cdot x^k$ führt. Für $k = 1$ handelt es sich also um die lineare Progression, die eigentlich nicht mit (9) kompatibel ist. Daher wird in der Praxis ein Betrag x_{max} für das Ende der Progression P_1 festgelegt und anschließend $P = P_{max}$ gesetzt.

- Für $k \neq 0$, $\alpha = 0$ entspricht (8) der Differentialgleichung
$$P_0'(x) = k \cdot P_0(x),$$
mit der Lösung $P_0(x) = C\mathrm{e}^{k \cdot x}$. Daher kann C auch in diesem Fall nicht mit der Bedingung (9) festgelegt werden.

- Für $k > 0$, $\alpha > 0$ und $\alpha \neq 1$ lautet die Lösung von (8) mit (9)
$$P_\alpha(x) = P_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}}.$$

Das bedeutet z.B.
$$P_2(x) = P_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{x}}, \quad P_3(x) = P_{max} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{2\,x^2}}, \quad \text{usw.}$$
Die in den Abschnitten 4–7 betrachteten Funktionen entsprechen demzufolge
$$E(x) = P_2(x), \quad S(x) = P_2(x) \cdot x.$$
Allgemeiner könnten demzufolge für $\alpha > 1$ auch
$$E_\alpha(x) = P_\alpha(x), \quad S_\alpha(x) = P_\alpha(x) \cdot x$$
gewählt werden, was zusätzliche Möglichkeiten eröffnet. Die entsprechende Funktion ρ wäre jeweils
$$\rho_\alpha(x) = \frac{k}{x^\alpha}.$$
Eine Verschiebung um x_0 (vgl. Abschnitt 8) könnte auch bei diesen Ansätzen einbezogen werden, womit
$$\rho_\alpha(x) = \frac{k}{(x - x_0)^\alpha}$$
betrachtet werden würde. Für $x_{0.5}$ würde aus
$$P_\alpha(x_{0.5}) = 0.5 \cdot P_{max}$$
dann $k = (\alpha - 1) \cdot \ln(2) \cdot (x_{0.5} - x_0)^{\alpha-1}$ folgen.

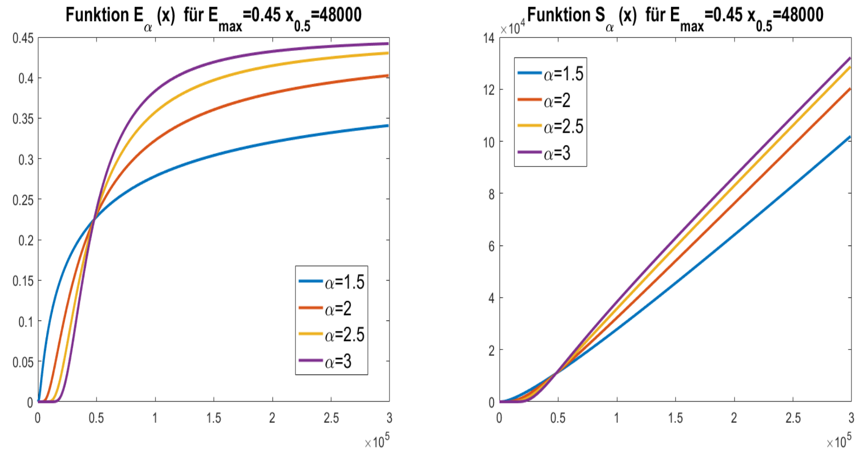

Abbildung 8: Auswirkung der Potenz bei allgemeineren Funktionen.

11 Umsetzbarkeit

Sollten die hergeleiteten Funktionen als Grundlage für zukünftige Einkommenstarife verwendet werden, so müsste beim politischen Prozess an erster Stelle entschieden werden, welches Verhalten von

$$\frac{E'(x)}{E(x)} = \rho(x)$$

gewünscht wird. Ist

- $\rho(x) = 0$, so ist E konstant, S linear $G = E$ (Flat Tax, $k = 0$).
- $\rho(x) = \frac{1}{x}$, d.h. der Kehrwert des Einkommens, so ist E linear, S quadratisch und G linear (lineare Progression, $\alpha = 1$, $k = 1$).
- $\rho(x) = \frac{k}{x^2}$, d.h. invers proportional zum Quadrat des Einkommens, so ergeben sich die in Abschnitt 4 dargestellten Funktionen ($\alpha = 2$).
- $\rho(x) = \frac{k}{x^\alpha}$, d.h. allgemein invers proportional zur α-ten Potenz des Einkommens, so ergeben sich die in Abschnitt 10 dargestellten Funktionen.

Zusätzlich könnte jeweils ein Grundfreibetrag x_0 einbezogen werden. Sollte (3) verwendet werden, so ergeben sich die in Abschnitt 8 dargestellten Funktionen.

Für die Funktionen (4)-(6) aus Abschnitt 8 müssten des Weiteren lediglich der Spitzensteuersatz E_{max}, das Halbspitzensteuersatzeinkommen $x_{0.5}$ und der Grundfreibetrag x_0 festgelegt werden. Eine Änderung eines Parameters wirkt sich dabei

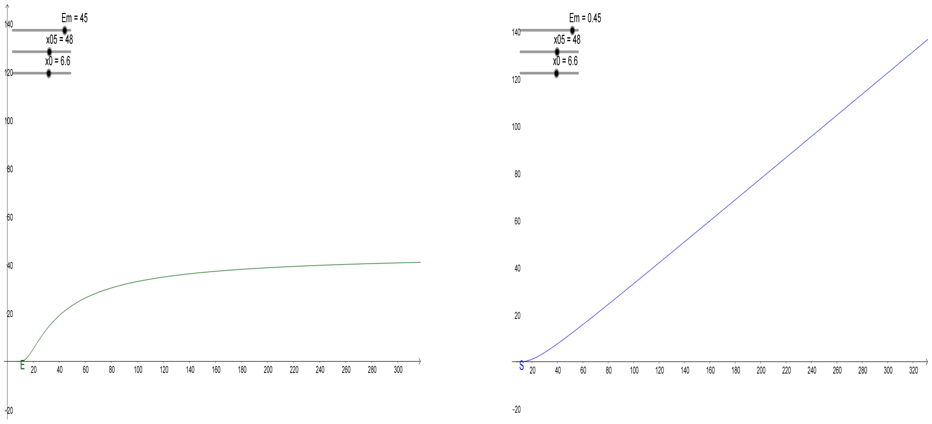

Abbildung 9: Darstellung von $E(x)$ (links) und $S(x)$ (rechts) mit GeoGebra nach der Anpassung der Schieberegeler und des Darstellungsintervalles.

immer global aus. Den Verlauf könnte sich jeder Betroffene beispielsweise mit dem kostenlosen Programm GeoGebra [4], das zunehmend auch in Schulen verwendet wird, verdeutlichen. Die direkte Eingabe von z.B.

```
Em*(2^(-(x05-x0)/(x-x0)))
```

erzeugt sogenannte Schieberegeler für die Parameter `Em` für E_{max}, `x05` für $x_{0.5}$, `x0` für x_0 [5].

Bei der Steuerfunktion für das Jahr 2017 sind die Folgen einer Veränderung der Parameter deutlich komplizierter zu berechnen. Somit wären bei einer Umstellung nicht nur die Parameter anschaulicher, über die diskutiert werden müsste, sondern auch die Folgen einer Veränderung leichter schätzbar.

Möchte man hingegen den Abstand zu E_{2017} oder S_{2017} oder die Umstellungskosten minimieren, so könnte man die Parameter (ggf. inklusive α) als Lösung einer entsprechenden Optimierungsaufgabe bestimmen. De facto liefern die hergeleiteten Funktionen aber auch Möglichkeiten, eine Abflachung und Glättung des Mittelstandsbauchs durchzuführen, ohne die Einkommensteuerfunktion zu linearisieren, vgl. z.B. [3].

[5] Es bietet sich dabei an, alle Beträge in Tausendstel zu betrachten, für $E(x)$ die Werte mit 100 zu skalieren und für $S(x)$ hingegen nicht, vgl. Abbildung 9. Der Bereich $x < x_0$ ist dabei zu vernachlässigen und die Intervalle der Schieberegeler sollten angepasst werden, was durch Anklicken erfolgen kann. Das betrachtete Intervall für `x` kann auf einem Touchscreen leicht verschoben werden.

12 Ausblick

Der dargestellte Ansatz unterscheidet sich grundlegend von dem der Berechnung der Einkommensteuerfunktion für das Jahr 2017. Es wird von einer glatten (parameterabhängigen) Funktion ρ ausgegangen, so dass die Funktionen für den Effektivsteuersatz E, die Einkommensteuerfunktion S und den Grenzsteuersatz G entsprechend berechnet werden.

Anhand dieser Herleitung wurde allgemein verdeutlicht, wie Differentialgleichungen zur Berechnung von Progressionen einbezogen werden können. Die Herangehensweise kann insbesondere für Anwendungsbereiche, in denen Progressionen stückweise festgelegt werden, zu deutlichen Vereinfachungen führen.

Literatur

[1] Peter Gottfried, Daniela Witczak: Das Ehegattensplitting, Expertise für das Kompetenzzentrum für familienbezogene Leistungen im Bundesministerium für Familie, Senioren, Frauen und Jugend, November 2006.

[2] Andreas Peichl, Florian Buhlmann, Max Löffler: Grenzbelastungen im Steuer-, Abgaben- und Transfersystem. Fehlanreize, Reformoptionen und ihre Wirkungen auf inklusives Wachstum, Gütersloh: Bertelsmann-Stiftung, August 2017.

[3] Nico Pestel, Reinhold Schnabel, Sebastian Siegloch, Eric Sommer, Alexander Spermann: Ist eine Glättung des Mittelstandsbauchs finanzierbar? Eine Mikrosimulationsstudie, IZA Standpunkte Nr. 86, Juli 2016.

[4] https://www.geogebra.org