Fachbereich II – Mathematik - Physik - Chemie

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

03/2011

Horst Herrmann

Flächenträgheitsmoment eines allgemeinen Drei- und Vierecks

Geometrical moment of inertia for a general tri- and quadrangle (in German)

Reports in Mathematics, Physics and Chemistry

Berichte aus der Mathematik, Physik und Chemie

ISSN (print): 2190-3913

Reports in Mathematics, Physics and Chemistry

Berichte aus der Mathematik, Physik und Chemie

The reports are freely available via the Internet:
http://www1.beuth-hochschule.de/FB_II/reports/welcome.htm

03/2011, July 2011

Flächenträgheitsmoment eines allgemeinen Drei- und Vierecks
Geometrical moment of inertia for a general tri- and quadrangle (in German)

Editorial notice / Impressum

Published by / Herausgeber:
Fachbereich II
Beuth Hochschule für Technik Berlin
Luxemburger Str. 10
D-13353 Berlin
Internet: http://public.beuth-hochschule.de/FB_II/
E-Mail: fbiireports@beuth-hochschule.de

ISSN (print): 2190-3913

Flächenträgheitsmoment eines allgemeinen Drei- und Vierecks

Die Berechnung von Flächenträgheitsmomenten ist von grundlegender Bedeutung für die Berechnung von Balken und Rahmentragwerken. Aus der Annahme des „eben Bleibens“ des Balkenquerschnitts und dem Hooke’schen Gesetz folgt, dass die Biegespannungen im Querschnitt linear verlaufen. Die Größe der Biegespannungen und die Krümmung sind umgekehrt proportional zum Flächenträgheitsmoment I_{xx}.

$$I_{xx} = \int_x \int_y y^2 \, dy \, dx \qquad \ldots (1)$$

Das kartesische xy Koordinatensystem des Querschnitts ist dabei so gelegt, dass für eine Biegung um die x Achse, das statische Moment S_{xx} Null wird.

$$S_{xx} = \int_x \int_y y \, dy \, dx = 0 \qquad \ldots (2)$$

Die entsprechenden Größen für die Biegung um die y Achse ergeben sich analog. Schließlich wird für die Biegung um eine allgemeine Achse noch das gemischte Flächenträgheitsmoment gebraucht.

$$I_{xy} = \int_x \int_y x \, y \, dy \, dx \qquad \ldots (3)$$

Die Auswertung der Integrale für die wichtigsten Regelflächen (Rechteck, Kreis, Dreieck mit einer parallelen Seite zur Biegeachse, …) findet man in Tabellen der Standardwerke der Technischen Mechanik. Die Kennwerte für allgemeine Flächen können nach den Steinerschen Verfahren aus diesen berechnet werden.

Die Auswertung der Integrale für ein allgemeines Dreieck ist aufwändiger und bedarf der Fallunterscheidung, wenn man im kartesischen Koordinatensystem bleibt. Wesentlich einfachere Ergebnisse erhält man, wenn man die Berechnung in Dreieckkoordinaten durchführt.

Betrachtet wird das Dreieck k_1, k_2, k_3 mit der Fläche F, siehe Bild 1. Die Eckpunkte des Dreiecks haben die kartesischen Koordinaten k_1 (x_1, y_1), k_2 (x_2, y_2) und k_3 (x_3, y_3).

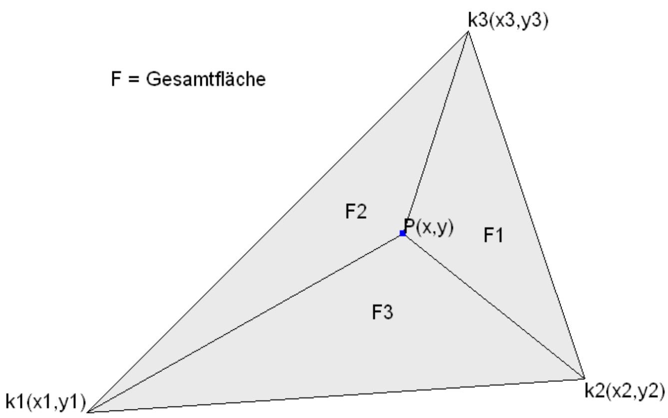

Bild 1: Bezeichnungen am Dreieck

Ein beliebiger Punkt P in dem Dreieck legt drei Subdreiecke fest, die durch den Punkt selbst und jeweils zwei Dreieckpunkte gebildet werden. Die Subdreiecke haben die Flächen F_1, F_2, F_3.

Die Lage des Punktes P in dem Dreieck kann man nun beschreiben, indem man das Verhältnis der Flächen der drei Subdreiecke zu der Gesamtfläche des Dreiecks angibt. Diese Flächenverhältnisse heißen Dreieckkoordinaten.

$$\begin{aligned} L_1 &= F_1 \;/\; F \\ L_2 &= F_2 \;/\; F \\ L_3 &= F_3 \;/\; F \end{aligned} \qquad \text{... (4)}$$

Die Summe der Dreieckkoordinaten ist Eins, da nur zwei der Dreieckkoordinaten unabhängig sind. Die dritte Dreieckkoordinate lässt sich über Gleichung (5) bestimmen.

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \qquad \text{… (5)}$$

Zwischen den Dreieckkoordinaten und den kartesischen Koordinaten besteht ein eindeutiger Zusammenhang, wenn die Lage des Dreiecks im kartesischen Koordinatensystem festliegt.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{T}} \quad \underline{\mathbf{L}} \qquad \text{... (6)}$$

Die Gleichung (6) lässt sich invertieren, wenn die Fläche F des Dreiecks von Null verschieden ist.

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = 1/(2\,F) \begin{bmatrix} y_{23} & -x_{23} & (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ y_{31} & -x_{31} & (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ y_{12} & -x_{12} & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \quad \underline{\mathbf{x}} \qquad \text{... (7)}$$

mit

$$x_{ij} = x_i - x_j \qquad \text{und} \qquad y_{ij} = y_i - y_j$$

$$\begin{aligned} 2\,F = \det(\,\underline{\mathbf{T}}\,) &= x_2\,y_3 - x_3\,y_2 - x_1\,y_3 + x_3\,y_1 + x_1\,y_2 - x_2\,y_1 \\ &= x_{12}\;\; y_{23}\; - y_{12}\;\; x_{23} \\ &= x_{23}\;\; y_{31}\; - y_{23}\;\; x_{31} \\ &= x_{31}\;\; y_{12}\; - y_{31}\;\; x_{12} \end{aligned} \qquad \text{... (8)}$$

Bei der Integration über die Dreieckfläche von Funktionen, die in Dreieckkoordinaten geschrieben sind, sind Integrale vom Typ (9) zu lösen, die über Gleichung (5) in eine Form von Gleichung (10) überführt werden können.

$$I = \int_F f(L_1, L_2, L_3)\; dF \qquad \text{... (9)}$$

$$I = \int_F f(L_1, L_2)\; dF \qquad \text{... (10)}$$

Das Flächendifferential dF kann durch zwei differentielle Dreieckkoordinaten ersetzt werden.

$$dF = 2\,F\,dL_1\,dL_2 \qquad \text{... (11)}$$

Die Integrationsgrenzen müssen dann bezüglich der Differentiale dL_1 und dL_2 angepasst werden, siehe /1/.

$$I = 2\,F \int_{L_1=0}^{1} \int_{L_2=0}^{1-L_1} f(L_1, L_2)\,dL_2\,dL_1 \qquad \text{... (12)}$$

Zur Auswertung des Intergrals (1) muss nun noch y^2 durch Gleichung (6) ersetzt werden.

$$I_{xx} = \int_x \int_y y^2\,dy\,dx = 2\,F \int_{L_1=0}^{1} \int_{L_2=0}^{1-L_1} \left(y_3 + L_1 y_{13} + L_2 y_{23}\right)^2 dL_2\,dL_1 \qquad \text{... (13)}$$

Die nun triviale Berechnung dieses und der anderen Integrale ergibt:

$$S_{xx} = \frac{F}{3}\left(y_1 + y_2 + y_3\right) \qquad \text{... (14)}$$

$$I_{xx} = \frac{F}{6}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1\right) \qquad \text{... (15)}$$

$$I_{xy} = \frac{F}{12}\left(x_1\left(2\,y_1 + y_2 + y_3\right) + x_2\left(y_1 + 2\,y_2 + y_3\right) + x_3\left(y_1 + y_2 + 2\,y_3\right)\right) \qquad \text{... (16)}$$

Die Fläche F kann dabei nach Gleichung (8) bestimmt werden.

Eine analoge Vorgehensweise für das allgemeine Viereck mit den Eckpunkten 1 bis 4, nummeriert gegen den Uhrzeigersinn, führt zu den Werten:

$$F = \frac{1}{2}\left(x_{13}\,y_{24} - x_{24}\,y_{13}\right) \qquad \text{... (17)}$$

$$S_{xx} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} +x_1\,y_{24}(\,y_4 + y_1 + y_2\,) + x_2\,y_{31}(\,y_1 + y_2 + y_3\,) \\ +x_3\,y_{42}(\,y_2 + y_3 + y_4\,) + x_4\,y_{13}(\,y_3 + y_4 + y_1\,) \end{pmatrix} \qquad \text{... (18)}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} +y_1^2\left(x_{41}y_4 + x_{12}y_2 + x_{42}y_1\right) + y_2^2\left(x_{12}y_1 + x_{23}y_3 + x_{13}y_2\right) \\ +y_3^2\left(x_{23}y_2 + x_{34}y_4 + x_{24}y_3\right) + y_4^2\left(x_{34}y_3 + x_{41}y_1 + x_{31}y_4\right) \end{pmatrix} \qquad \text{... (19)}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} x_1^2\left(y_2^2 + 2\,y_1\,y_{24}\right) - y_1^2\left(x_2^2 + 2\,x_1\,x_{42}\right) \\ x_2^2\left(y_3^2 + 2\,y_2\,y_{31}\right) - y_2^2\left(x_3^2 + 2\,x_2\,x_{13}\right) \\ x_3^2\left(y_4^2 + 2\,y_3\,y_{42}\right) - y_3^2\left(x_4^2 + 2\,x_3\,x_{24}\right) \\ x_4^2\left(y_1^2 + 2\,y_4\,y_{13}\right) - y_4^2\left(x_1^2 + 2\,x_4\,x_{31}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{... (20)}$$

/1/ Herrmann, Horst; Skripte zur Methode der Finiten Elemente;
http://public.beuth-hochschule.de/~herrmann/skripte/FEM_I_2_4_4_Dreieckkoordinaten.pdf